

MATEMÁTICA

BÁSICA

Para estudiantes
de Ciencias e Ingenierías

Lógica
Teoría de Conjuntos
Sistema de Números Reales
Relaciones y Funciones
Inducción Matemática
Números Complejos
Teoría de Ecuaciones
Vectores en \mathbb{R}^2

Eduardo Espinoza Ramos
Perú

ediciones
edukperú

» PRÓLOGO

La presente obra titulada "Matemática Básica" en su tercera edición contiene esencialmente los temas que generalmente se desarrolla en los primeros cursos en las carreras de ciencias, Ingeniería, Economía, Administración, Medicina, etc., así como también en los Institutos Superiores.

En la actualidad el contenido científico de un libro debe complementarse con el aspecto didáctico que es tan importante como el contenido científico, por tal motivo en el presente trabajo se expone en forma Teórica y Práctica en donde en cada capítulo comienza con enunciados claros de las definiciones y Teoremas juntos con sus respectivos ejemplos seguidos de una colección de problemas resueltos y problemas propuestos.

En las definiciones importantes así como los Teoremas y Propiedades son explicados en forma clara y amena ilustrado con gráficos y ejemplos en forma graduada.

La presente obra consta de ocho capítulos: Lógica, Conjunto, Sistema de los Números Reales, Relaciones y Funciones, inducción Matemática, Números Complejos, la Teoría de Polinomios y Vectores en R^2 que es el capítulo que se ha agregado a la edición anterior así mismo se ha incluido la divisibilidad de los números enteros, se ha incluido más problemas y aplicaciones a la economía.

El presente texto es básicamente para estudiantes recién ingresantes a las Universidades en las especialidades de Ciencias Matemáticas, Físicas, Ingeniería y Economía y a toda persona interesada en fundamentar sólidamente sus conocimientos matemáticos.

Deseo expresar mi más profundo agradecimiento a mis colegas de las diversas universidades en donde presto mis servicios, quienes con su apoyo moral y sugerencias han hecho posible la realización de este libro en su 3ra edición.

Agradezco por anticipado la acogida que brinden a la presente obra.

Eduardo Espinoza Ramos

MATEMÁTICA BÁSICA

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

1. LÓGICA.-

1.1.	Introducción	1
1.2.	Elementos de Lógica Simbólica	2
1.3.	Proposiciones Lógicas	3
1.4.	Definición	3
1.5.	Conectivos Lógicos	3
1.6.	Clases de Proposiciones Lógicas	4
1.7.	Proposiciones Compuestas Básicas	4
1.8.	Proposiciones Compuestas	8
1.9.	Jerarquía de los Conectivos Lógicos	9
1.10.	Tautológicas, contradicciones y contingencias	9
1.11.	Implicación Lógica y Equivalencia Lógica	12
1.12.	Proposiciones Lógicamente Equivalente	13
1.13.	Principales Leyes Lógicas o Tautológicas	13
1.14.	La Inferencia Lógica o Argumento Lógico	18
1.15.	Definición	18
1.16.	Teorema	19
1.17.	Inferencia Válidas Notables	20
1.18.	El Método Abreviado	21
1.19.	Métodos de Demostración	25
1.20.	Forma o Método Directo de Demostración	25
1.21.	Forma o Método Indirecto de Demostración	26
1.22.	Definición	26
1.23.	Circuitos Lógicos	28
1.24.	Diseño de Circuitos Eléctricos en Serie	28
1.25.	Diseño de Circuitos Eléctricos en Paralelo	29
1.26.	Lógica Cuantificacional	33
1.27.	Cuantificadores Existencial y Universal	33
1.28.	Negación de Proposiciones en Cuantificadores	35
1.29.	Ejercicios Desarrollados	36
1.30.	Ejercicios Propuestos	49

▶ CAPITULO 2

2. TEORÍA DE CONJUNTOS

2.1.	Definición	69
2.2.	Definición	69
2.3.	Relación de Pertenencia	69
2.4.	Diagrama de VENN – EULER	70
2.5.	Determinación de Conjuntos	71
2.6.	Conjuntos Numéricos	72
2.7.	Conjunto Finito	73
2.8.	Conjunto Infinito	73
2.9.	Relaciones entre Conjunto	76
2.10.	Igualdad de Conjuntos	76
2.11.	Propiedades de la Igualdad de Conjunto	77
2.12.	Conjuntos Especiales	79
2.13.	Representación Gráfica de los Conjuntos	80
2.14.	Ejercicios Propuestos	83
2.15.	Operaciones con Conjuntos	103
2.16.	Conjunto Potencia	104
2.17.	Propiedades del Conjunto Potencia	107
2.18.	Intervalos	108
2.19.	Operaciones de Conjuntos Aplicados a los Intervalos	112
2.20.	Familia de Conjuntos	117
2.21.	Número de Elementos de un Conjunto	117
2.22.	Propiedades del Número de Elementos de un Conjunto	125
2.23.	Ejercicios Propuestos	125

▶ CAPITULO 3

3. SISTEMA DE NÚMEROS REALES

3.1.	Introducción	140
3.2.	Definición	141
3.3.	Axioma de Sustitución	143
3.4.	Axioma Distributivo	143

3.43. Ejercicios Propuestos 318

► CAPITULO 4

4. RELACIONES Y FUNCIONES

4.1.	Introducción	323
4.2.	Relaciones Binarias	332
4.3.	Gráfica de una Relación de R en R	339
4.4.	Ejercicios Desarrollados	343
4.5.	Ejercicios Propuestos	353
4.6.	Funciones	356
4.7.	Dominio y Rango de una Función	357
4.8.	Criterio para el Cálculo de Dominio y Rango de una Función	358
4.9.	Aplicación de A en B	359
4.10.	Funciones Especiales	360
4.11.	Evaluación de una Función	365
4.12.	Funciones Definidas con Varias Reglas de Correspondencia	365
4.13.	Trazado de Gráficas Especiales	366
4.14.	Ejercicios Desarrollados	370
4.15.	Ejercicios Propuestos	388
4.16.	Operaciones con Funciones	399
4.17.	Composición de Funciones	404
4.18.	Propiedades de la Composición de Funciones	411
4.19.	Ejercicios Desarrollados	411
4.20.	Ejercicios Propuestos	423
4.21.	Función: Inyectiva, Suprayectiva y Biyectiva	433
4.22.	Funciones Crecientes, Decrecientes y Monótonas	436
4.23.	Cálculo de Rango de Funciones Inyectivas Monótonas	438
4.24.	Función Inversa	439
4.25.	Función Inversa de una Composición	441
4.26.	Ejercicios Desarrollados	441
4.27.	Ejercicios Propuestos	454
4.28.	Aplicaciones de las Funciones en Administración y Economía	466
4.29.	Ejercicios Desarrollados	477
4.30.	Ejercicios Propuestos	483

3.5.	Teorema de la Igualdad para la Suma	143
3.6.	Teorema de la Igualdad para la Multiplicación	143
3.7.	Teorema de Cancelación para la Adición	143
3.8.	Teorema de Cancelación para la Multiplicación	144
3.9.	Sustracción de Números Reales	144
3.10.	División de Números Reales	144
3.11.	Ejercicios Desarrollados	145
3.12.	Representación de los Números Reales	149
3.13.	Desigualdades	150
3.14.	Axioma de la Relación de Orden	151
3.15.	Definición	151
3.16.	Teorema	151
3.17.	Teorema	152
3.18.	Teorema	152
3.19.	Teorema	153
3.20.	Teorema	153
3.21.	Teorema	154
3.22.	Ejercicios Desarrollados	154
3.23.	Ejercicios Propuestos	162
3.24.	Inecuaciones	168
3.25.	Conjunto Solución de una Inecuación	170
3.26.	Resolución de una Inecuación	170
3.27.	Inecuación de Primer Grado en una Incógnita	170
3.28.	Inecuación de Segundo Grado en una Incógnita	172
3.29.	Inecuaciones Polinómicas	177
3.30.	Inecuaciones Fraccionarias	181
3.31.	Inecuaciones Exponenciales	183
3.32.	Inecuaciones Irracionales	185
3.33.	Ejercicios Desarrollados	196
3.34.	Ejercicios Propuestos	221
3.35.	Valor Absoluto	238
3.36.	Propiedades Básicas para resolver Ecuación e Inecuaciones donde interviene Valor Absoluto	239
3.37.	Máximo Entero	242
3.38.	Propiedades del Máximo Entero	244
3.39.	Inecuación Logarítmica	249
3.40.	Ejercicios Desarrollados	251
3.41.	Ejercicios Propuestos	293
3.42.	Aplicaciones de las Inecuaciones a la Administración y Economía	314

▶ CAPITULO 5

5. INDUCCIÓN MATEMÁTICA

5.1.	Introducción	490
5.2.	Conjuntos Acotados	491
5.3.	Axioma del Supremo o Axioma de la Mínima Cota Superior	492
5.4.	Principio Arquimediano	493
5.5.	Principio del Buen Orden	495
5.6.	Menor Elemento y Mayor elemento de $A \subset \mathbb{R}$	495
5.7.	Proposición	496
5.8.	Sub Conjuntos Inductivos de \mathbb{R}	496
5.9.	El Principio de Inducción Matemática Completa	498
5.10.	Teorema 1 (Primer Principio de Inducción)	499
5.11.	Teorema 2 (Segundo Principio de Inducción)	499
5.12.	Definición	500
5.13.	Ejercicios Propuestos	507
5.14.	Sumatorias	511
5.15.	Propiedades de la Sumatoria	511
5.16.	Fórmulas de la Sumatoria	516
5.17.	Notación del Producto de n Números	520
5.18.	Ejercicios Propuestos	523
5.19.	Divisibilidad en \mathbb{Z}	529
5.20.	Máximo como Divisor M.C.D.	534
5.21.	Lema	538
5.22.	Mínimo Común Múltiplo	539
5.23.	Regla para averiguar si un número dado es primo	540
5.24.	Criba de Eratóstenes	541
5.25.	Ejercicios Propuestos	542
5.26.	La Función Factorial	543
5.27.	Números Combinatorios	544
5.28.	Principales Propiedades de los Coeficientes Binomiales	546
5.29.	El Triángulo de BLAISE PASCAL	548
5.30.	Potencias de un Binomio	548
5.31.	Ejercicios Propuestos	551

▶ CAPITULO 6

6. NÚMEROS COMPLEJOS

6.1.	Ecuaciones sin Solución en \mathbb{R}	557
6.2.	Definición	557
6.3.	Definición	557
6.4.	Plano Complejo	558
6.5.	Definición	558
6.6.	Ejercicios Propuestos	558
6.7.	Cero y Opuesto de un Número Complejo	559
6.8.	Operaciones con Complejos	560
6.9.	Unidad Imaginaria	560
6.10.	Forma Estándar o Binómica de Números Complejos	566
6.11.	Teorema	566
6.12.	La Conjugación en \mathbb{C}	566
6.13.	Módulo de un Número Complejo	567
6.14.	Ejercicios Desarrollados	568
6.15.	Ejercicios Propuestos	589
6.16.	Forma Trigonométrica o Polar de un Número Complejo	598
6.17.	Multiplicación y División en Forma Polar	600
6.18.	Potencia y Raíces de Números Complejos	601
6.19.	Exponenciales Complejas (Fórmula de Euler)	604
6.20.	Logaritmos en \mathbb{C}	605
6.21.	Exponencial Compleja General	606
6.22.	Ejercicios Desarrollados	607
6.23.	Ejercicios Propuestos	619
6.24.	Miscelánea de Ejercicios	623

▶ CAPITULO 7

7. TEORÍA DE ECUACIONES

7.1.	Definición	635
7.2.	Ecuaciones Polinómicas de Segundo Grado	637
7.3.	Raíces y Discriminante de una Ecuación Cuadrática	637
7.4.	Relación Entre Raíces y Coeficientes de una Ecuación Cuadrática	638

7.5.	Ecuaciones Reducibles a Cuadráticas	639
7.6.	Ecuaciones Irracionales	640
7.7.	Algoritmo de la División	642
7.8.	Teorema (Algoritmo de la División para Polinomio)	643
7.9.	La División Sintética	643
7.10.	Teorema del Resto	645
7.11.	Teorema del Factor	646
7.12.	Raíces de un Polinomio	646
7.13.	Teorema Fundamental del Algebra	646
7.14.	Número de Raíces de una Ecuación Polinómica	647
7.15.	Definición	647
7.16.	Raíces Enteras	648
7.17.	Forma Factorizada de un Polinomio	649
7.18.	Relación Entre los Coeficientes y las Raíces de una Ecuación Polinómica	650
7.19.	Naturaleza de las raíces de Polinomios Reales	651
7.20.	Raíces Racionales de un Polinomio	653
7.21.	Teorema del Limite Superior de las Raíces Reales (LAGRANGE)	653
7.22.	Variación de Signos de un Polinomio	654
7.23.	Regla de los Signos de Descartes	654
7.24.	Ecuaciones Binómicas	654
7.25.	Ecuaciones Trinómicas Bicuadradas	655
7.26.	Ecuaciones Recíprocas	656
7.27.	Ecuaciones Polinómicas de Tercer Orden	657
7.28.	Ecuaciones Cuártica	660
7.29.	Gráfica de un Polinomio	662
7.30.	Regla	664
7.31.	Solución Numérica de Ecuaciones con el Método de Newton	666
7.32.	Ejercicios Propuestos	669

▶ CAPITULO 8

8. VECTORES EN R²

8.1.	Conceptos Básicos	682
8.2.	Vectores Bidimensional	685
8.3.	Operaciones con Vectores	687
8.4.	Longitud o Módulo de un Vector	694
8.5.	Propiedades del Módulo de un Vector	696

8.6.	Vector Unitario	697
8.7.	Teorema	697
8.8.	Dirección de un vector en R^2	698
8.9.	Producto Escalar de Vectores	700
8.10.	Propiedades del Producto Escalar de Vectores	701
8.11.	Vectores Paralelos y Ortogonales	702
8.12.	Criterio de Colinealidad	703
8.13.	Interpretación Geométrica de la Ortogonalidad de Vectores	704
8.14.	Teorema	705
8.15.	Teorema	706
8.16.	Teorema	706
8.17.	Corolario	707
8.18.	Combinación Lineal de Vectores	708
8.19.	Teorema	709
8.20.	Teorema	710
8.21.	Dependencia e Independencia Lineal de Vectores en R^2	710
8.22.	Vectores Fundamentales	712
8.23.	Propiedades de los Vectores Ortogonales Unitarios	713
8.24.	Definición	714
8.25.	Proyección Ortogonal y Componente	714
8.26.	Definición	715
8.27.	Propiedades del Vector Proyección y Componente	716
8.28.	Relación entre Proyección y Componente	717
8.29.	Angulo entre Dos Rectas	718
8.30.	La Desigualdad de Cauchy – Schwarz	720
8.31.	Área de: Triángulo y Paralelogramo	721
8.32.	Ejercicios Desarrollados	722
8.33.	Ejercicios Propuestos	760
	BIBLIOGRAFIA	784